

# Simulation der Energieverlust-Streuung

Maria Physicist

2. Juni 2000

## 1. Einführung

Aufgrund der stochastischen Natur des Energieverlustes bei Ionisierung können in der Energiemenge eines Teilchens, das auf ein absorbierendes Element übertragen wird, große Fluktuationen auftreten. Kontinuierliche Prozesse, wie etwa Mehrfachstreuung und Energieverluste, spielen eine große Rolle bei der longitudinalen und lateralen Ausbreitung elektromagnetischer und hadronischer Schauer, und bei der Simulation von Kalorimetern kann die erhaltene Auflösung in den aktiven Schichten von solchen Fluktuationen empfindlich beeinträchtigt werden. Die Beschreibung der Fluktuation bei Ionisierung wird durch den Signifikanz-Parameter  $\kappa$  dargestellt, der sich proportional zum Verhältnis des mittleren Energieverlustes zum maximal möglichen Energieübertrag bei einer einzelnen Kollision mit einem ungebundenen Elektron verhält.

$$\kappa = \frac{\xi}{E_{\max}}$$

$E_{\max}$  ist die maximal übertragbare Energie bei einer einzelnen Kollision mit einem ungebundenen Elektron.

$$E_{\max} = \frac{2m_e\beta^2\gamma^2}{1 + 2\gamma m_e/m_x + (m_e/m_x)^2},$$

wobei  $\gamma = E/m_x$ ,  $E$  die Energie,  $m_x$  die Masse des einfallenden Teilchens und  $\beta^2 = 1 - 1/\gamma^2$  sowie  $m_e$  die Elektronenmasse sind.  $\xi$  wird abgeleitet vom Rutherford'schen Streuquerschnitt und ist definiert als:

$$\xi = \frac{2\pi z^2 e^4 N_{\text{Av}} Z \rho \delta x}{m_e \beta^2 c^2 A} = 153.4 \frac{z^2 Z}{\beta^2 A} \rho \delta x \quad \text{keV},$$

wobei gilt:

$z$	Ladung des einfallenden Teilchens
$N_{\text{Av}}$	Avogadro-Zahl
$Z$	Ordnungszahl des Elements
$A$	Atomgewicht des Elements
$\rho$	Dichte
$\delta x$	Dicke des Materie

$\kappa$  mißt den Beitrag der Kollisionen mit Energieübertrag nahe an  $E_{\max}$ . Bei einem gegebenen Absorber geht  $\kappa$  gegen große Werte, wenn  $\delta x$  groß ist und/oder wenn  $\beta$  klein ist. Entsprechend geht  $\kappa$  gegen Null, wenn  $\delta x$  klein ist und/oder wenn sich  $\beta$  an 1 annähert.

Der Wert von  $\kappa$  unterscheidet zwei Bereiche, die in der Beschreibung der Fluktuationen bei Ionisierung vorkommen:

1. Eine große Anzahl von Kollisionen, die zum Verlust der gesamten oder eines Großteils der Energie des einfallenden Teilchens während der Durchquerung eines Absorbers führen.

Da der gesamte Energieübertrag aus einer Vielzahl von kleinen Energieverlusten besteht, können wir das zentrale Grenztheorem anwenden und die Fluktuationen durch eine Gauss-Verteilung beschreiben. Dieser Fall ist auf nicht-relativistische Teilchen anwendbar und wird durch die Gleichung  $\kappa \gg 10$  beschrieben (wobei der mittlere Energieverlust im Absorber größer ist als der maximale Energieübertrag in einer einzelnen Kollision).

2. Teilchen, die dünne Zähler durchqueren, und einfallende Elektronen unter jeder Bedingung.  
Die relevanten Ungleichungen und Verteilungen sind  $0,01 < \kappa < 10$  für die Vavilov-Verteilung und  $\kappa < 0,01$  für die Landau-Verteilung.

Ein zusätzlicher Bereich ist definiert durch den Beitrag der Kollisionen mit kleinem Energieübertrag, der durch das Verhältnis  $\xi / I_0$  berechnet werden kann, wobei  $I_0$  das mittlere Ionisationspotential des Atoms ist. Die Landau-Theorie geht davon aus, daß die Anzahl dieser Kollisionen hoch ist und folglich der Einschränkung  $\xi / I_0 \gg 1$  unterliegt. In **GEANT** (siehe URL <http://wwwinfo.cern.ch/asdoc/geant/geantall.html>) wurde die Grenze der Landau-Theorie bei  $\xi / I_0 = 50$  gesetzt. Unterhalb dieser Grenze werden spezielle Modelle verwendet, welche die atomare Struktur der Materie berücksichtigen. Dies ist in dünnen Schichten und gasförmigen Materialien wichtig. Abbildung 1 zeigt das Verhalten von  $\xi / I_0$  als Funktion der Schichtdicke für ein Elektron von 100 keV bzw. 1 GeV kinetischer Energie in Argon, Silizium und Uran.

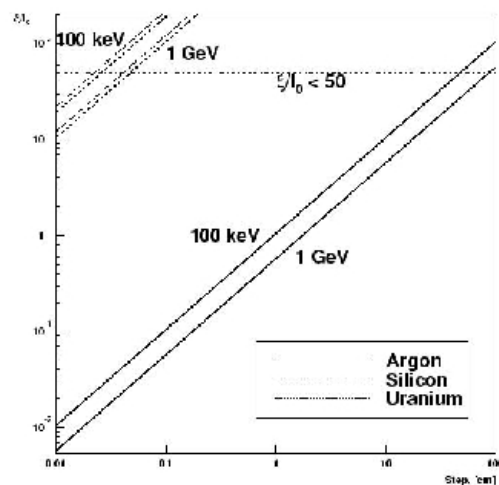


Figure 1. Die Variable  $\xi / I_0$  kann verwendet werden, um den Gültigkeitsbereich der Landau-Theorie zu messen. Sie ist abhängig von der Art und der Energie des Teilchens ( $Z$ ,  $A$ ) sowie von dem Ionisierungspotential der Materie und der Schichtendicke.

In den folgenden Abschnitten werden verschiedene Theorien und Modelle zur Fluktuation bei Energieverlusten beschrieben. Zunächst wird die Landau-Theorie mit ihren Einschränkungen erörtert; anschließend werden die Vasilov- und die Gauss-Streuungsfunktionen sowie die Methoden in dünnen Schichten und gasförmigen Materialien vorgestellt.

## 2. Landau-Theorie

Für ein Teilchen der Masse  $m_x$ , das eine Materie der Dicke  $\delta x$  durchquert, läßt sich die Landau-Wahrscheinlichkeitsverteilung in Form der universellen Landau-Funktion  $\phi(\lambda)$  beschreiben als[1]:

$$f(\epsilon, \delta x) = \frac{1}{\xi} \phi(\lambda)$$

wobei

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(u \ln u + \lambda u) du \quad c \geq 0$$

$$\lambda = \frac{\epsilon - \bar{\epsilon}}{\xi} - \gamma' - \beta^2 - \ln \frac{\xi}{E_{\max}}$$

$$\gamma' = 0.422784 \dots = 1 - \gamma$$

$$\gamma = 0.577215 \dots (\text{Euler-Konstante})$$

$\bar{\epsilon}$  = durchschnittlicher Energieverlust

$\epsilon$  = tatsächlicher Energieverlust

### 2.1. Einschränkungen

Der Landau-Formalismus macht zwei einschränkende Annahmen:

1. Der typische Energieverlust ist im Vergleich zum maximalen Energieverlust bei einer einzelnen Kollision gering. Diese Einschränkung wird durch die Vasilov-Theorie aufgehoben (siehe Abschnitt 3).
2. Der typische Energieverlust im Absorber sollte im Vergleich zur Bindungsenergie des am stärksten gebundenen Elektrons groß sein. Bei gasförmigen Detektoren beträgt der typische Energieverlust wenige keV, was vergleichbar ist mit den Bindungsenergien der inneren Elektronen. In diesen Fällen ist ein komplexerer Ansatz notwendig, der Energieniveaus[4] von Atomen berücksichtigt, um Datenverteilungen exakt zu simulieren. In **GEANT** wird ein parametrisches Modell von L. Urbán verwendet (siehe Abschnitt 5).

Außerdem ist der Erwartungswert der Landau-Verteilung unendlich. Wenn wir die Landau-Fluktuationen zusammenzählen, die aus den  $dE/dx$ -Tabellen für die durchschnittliche Energie ermittelt werden können, erhalten wir einen Wert, der größer ist als der aus der Tabelle ermittelte. Die Wahrscheinlichkeit, aus der Verteilung einen großen Wert zu erhalten, ist gering, so daß es eine große Anzahl von Schritten (Extraktionen) erfordert, bis die durchschnittliche Fluktuation signifikant größer ist als Null. Dadurch entsteht eine Abhängigkeit des Energieverlustes von der Schrittgröße, welche die Berechnungen beeinträchtigen kann.

Ein Lösungsansatz hierfür bot die Begrenzung des Wertes der anhand der Landau-Verteilung bestimmten Variablen, was die durchschnittliche Fluktuation auf 0 hält. Der aus der **GLANDO**-Routine berechnete Wert lautet:

$$\delta dE/dx = \epsilon - \bar{\epsilon} = \xi \left( \lambda - \gamma' + \beta^2 + \ln \frac{\xi}{E_{\max}} \right)$$

Damit dies einen Erwartungswert von Null ergibt, müssen wir erzwingen, daß:

$$\lambda^- = -\gamma' - \beta^2 - \ln \frac{\xi}{E_{\max}}$$

Dies wird durch die Einführung von  $\lambda_{\max}(\lambda^-)$  realisiert, in der Form, daß der Erwartungswert der Verteilung  $\lambda^-$  ist, wenn nur Werte von  $\lambda \leq \lambda_{\max}$  akzeptiert werden.

Eine Anpassung der Parameter für die universelle Landau-Verteilung wurde durchgeführt, mit dem folgenden Ergebnis:

$$\lambda_{\max} = 0.60715 + 1.1934\lambda^- + (0.67794 + 0.052382\lambda^-) \exp(0.94753 + 0.74442\lambda^-)$$

Nur Werte kleiner als  $\lambda_{\max}$  werden akzeptiert, ansonsten wird ein neuer Wert aus der Verteilungsfunktion bestimmt.

### 3. Vavilov-Theorie

Vavilov[5] leitete eine exaktere Streuungsverteilung ab, indem er einen kinematischen Grenzwert für die in einer einzelnen Kollision maximal übertragbare Energie einführte, anstatt  $E_{\max} = \infty$  zu verwenden. Die Formel lautet nun[2]:

$$f(\epsilon, \delta s) = \frac{1}{\xi} \phi_v(\lambda_v, \kappa, \beta^2)$$

wobei

$$\phi_v(\lambda_v, \kappa, \beta^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \phi(s) e^{\lambda s} ds \quad c \geq 0$$

$$\phi(s) = \exp[\kappa(1 + \beta^2 \gamma)] \exp[\psi(s)],$$

$$\psi(s) = s \ln \kappa + (s + \beta^2 \kappa) [\ln(s/\kappa) + E_1(s/\kappa)] - \kappa e^{-s/\kappa},$$

und

$$E_1(z) = \int_z^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt \text{ (das exponentielle Integral)}$$

$$\lambda_v = \kappa \left[ \frac{\epsilon - \epsilon^-}{\xi} - \gamma' - \beta^2 \right]$$

Die Vavilov-Parameter sind mit den Landau-Parametern verknüpft über  $\lambda_L = \lambda_v/\kappa - \ln \kappa$ . Es kann gezeigt werden, daß sich die Verteilung der Variablen  $\lambda_L$  bei  $\kappa \rightarrow 0$  der von Landau annähert. Bei  $\kappa \leq 0,01$  sind die beiden Verteilungen bereits praktisch identisch. Im Gegensatz zu vielen Lehrbüchern ist die Vavilov-Verteilung für kleine  $\kappa$  *keine* Näherung der Landau-Verteilung; vielmehr nähert sich die oben definierte Verteilung von  $\lambda_L$  dem eigentlichen  $\lambda$  aus der Landau-Dichtefunktion an. In der Routine **GVAVIV** wird daher kein Wert für die Variable  $\lambda_v$ , sondern für  $\lambda_L$  bestimmt. Für  $\kappa \geq 10$  nähert sich die Vavilov-Verteilung der Gauss-Verteilung an (siehe nächster Abschnitt).

## 4. Gauss-Theorie

Verschiedene, sich widersprechende Formen wurden für die Gauss-Streuungen vorgeschlagen. Die meisten scheinen jedoch nur eine geringe theoretische oder experimentelle Grundlage zu haben. Es wurde jedoch gezeigt[3], daß die Vasilov-Verteilung für  $\kappa \geq 10$  durch eine Gauss-Verteilung ersetzt werden kann, und zwar in der Form:

$$f(\epsilon, \delta s) \approx \frac{1}{\xi \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa} (1 - \beta^2/2)}} \exp \left[ -\frac{(\epsilon - \epsilon^-)^2}{2 \xi^2 (1 - \beta^2/2)} \right]$$

was impliziert, daß

$$\text{Erwartungswert} = \epsilon^-$$

$$\sigma^2 = \frac{\xi^2}{\kappa} (1 - \beta^2/2) = \xi E_{\max} (1 - \beta^2/2)$$

## 5. Urbán-Modell

Das Verfahren zur Berechnung begrenzter Energieverluste mit Erzeugung von  $\delta$ -Strahlung über einer gegebenen Schwellenenergie in **GEANT** ist eine Monte Carlo-Methode, die für dünne Schichten verwendet werden kann. Dieses Verfahren ist schnell und kann für eine beliebige Dicke eines Mediums angewendet werden. Bei Annäherung an die Gültigkeitsgrenze der Landau-Theorie nähert sich die Verlust-Verteilung kontinuierlich an die Landau-Formel an, wie Abbildung 2 zeigt.

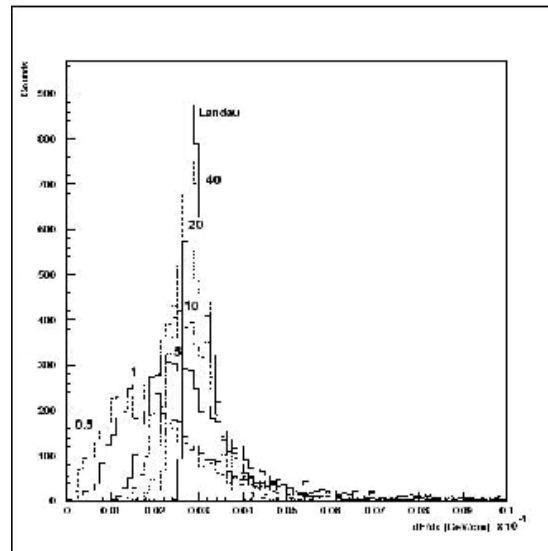


Figure 2. Energieverlust-Verteilung für ein 3 GeV-Elektron in Argon wie durch Standard-GEANT definiert. Die Dicke der Schichten ist in Zentimeter angegeben.

Es wird angenommen, daß die Atome nur zwei Energieniveaus mit den Bindungsenergien  $E_1$  und  $E_2$  haben. Die Teilchen-Atom-Wechselwirkung ist eine Anregung mit Energieverlust  $E_1$  oder  $E_2$  bzw. eine Ionisation mit einem Energieverlust, der gemäß der Funktion  $g(E) \sim 1/E^2$  verteilt ist:

$$g(E) = \frac{(E_{\max} + I)I}{E_{\max}} \frac{1}{E^2}$$

Der makroskopische Querschnitt für Anregungen ( $i = 1, 2$ ) ist

$$\Sigma_i = C \frac{f_i \ln(2m\beta^2\gamma^2/E_i) - \beta^2}{E_i \ln(2m\beta^2\gamma^2/I) - \beta^2} (1 - r)$$

und der makroskopische Querschnitt für die Ionisation ist

$$\Sigma_3 = C \frac{E_{\max}}{I(E_{\max} + I) \ln(\frac{E_{\max} + I}{I})} r$$

$E_{\max}$  ist der **GEANT**-Grenzwert für die  $\delta$ -Erzeugung oder der maximale Energieübertrag minus der mittleren Ionisationsenergie, wenn er kleiner ist als dieser Grenzwert. Die folgende Notierung wird verwendet:

$r, C$	Parameter des Modells
$E_i$	Energieniveaus der Atome
$I$	mittlere Ionisationsenergie
$f_i$	Oszillatorstärken

Das Modell hat die Parameter  $f_i$ ,  $E_i$ ,  $C$  und  $r$  ( $0 \leq r \leq 1$ ). Die Oszillatorstärken  $f_i$  und die Energieniveaus der Atome  $E_i$  sollten die Randbedingungen erfüllen

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &= 1 \\ f_1 \ln E_1 + f_2 \ln E_2 &= \ln I \end{aligned} \quad (4)$$

Der Parameter  $C$  läßt sich mit Hilfe des mittleren Energieverlustes  $dE/dx$  auf die folgende Weise definieren: Die Anzahl der Kollisionen ( $n_i$ ,  $i = 1, 2$  für die Anregung und 3 für die Ionisation) folgt der Poisson-Verteilung mit einer mittleren Anzahl  $\langle n_i \rangle$ . In einem Schritt  $\Delta x$  ist die mittlere Anzahl der Kollisionen  $\langle n_i \rangle = \Sigma_i \Delta x$

Der mittlere Energieverlust  $dE/dx$  in einem Schritt ist die Summe aus den Anregungs- und Ionisationsbeiträgen

$$\frac{dE}{dx} \Delta x = \left[ \Sigma_1 E_1 + \Sigma_2 E_2 + \Sigma_3 \int_I^{E_{\max} + I} E g(E) dE \right] \Delta x$$

Hieraus läßt sich mit Hilfe der Gleichungen (2), (3), (4) und (5) der Parameter  $C$  ableiten

$$C = \frac{dE}{dx}$$

Die folgenden Werte wurden in **GEANT** für die anderen Parameter verwendet:

$$f_2 = \begin{cases} 0 & \text{falls } Z \leq 2 \\ 2/Z & \text{falls } Z > 2 \end{cases} \quad =: \quad f_1 = 1 - f_2$$

$$E_2 = 10Z^2 \text{ eV} \quad =: \quad E_1 = \left( \frac{I}{E_2^{f_2}} \right)^{\frac{1}{f_1}} \quad r = 0.4$$

Mit diesen Werten entspricht das Energieniveau der Atome  $E_2$  in etwa der K-Schalenenergie der Atome und  $Z f_2$  der Anzahl der K-Schalenelektronen.  $r$  ist die einzige Variable, die frei bestimmt werden kann. Sie bestimmt den relativen Beitrag der Ionisation und der Anregung am Energieverlust.

Der Energieverlust wird unter der Annahme berechnet, daß die Schrittlänge (oder der relative Energieverlust) gering ist und folglich der Querschnitt entlang des Pfades als konstant betrachtet werden kann. Der Energieverlust durch Anregung beträgt

$$\Delta E_e = n_1 E_1 + n_2 E_2$$

wobei  $n_1$  und  $n_2$  aus der Poisson-Verteilung, wie oben besprochen, bestimmt werden. Der Verlust durch Ionisation kann aus der Verteilung  $g(E)$  mittels inversem Transformationsverfahren erzeugt werden:

$$u = F(E) = \int_I^E g(x) dx$$

$$E = F^{-1}(u) = \frac{I}{1 - u \frac{E_{\max}}{E_{\max} + I}}$$

wobei  $u$  eine gleichmäßig verteilte Zufallszahl zwischen  $F(I) = 0$  und  $F(E_{\max} + I) = 1$  ist. Der Beitrag der Ionisationen beträgt

$$\Delta E_i = \sum_{j=1}^{n_3} \frac{I}{1 - u_j \frac{E_{\max}}{E_{\max} + I}}$$

wobei  $n_3$  die Anzahl der Ionisationen ist (bestimmt aus der Poisson-Verteilung). Der Energieverlust in einem Schritt wird dann  $\Delta E = \Delta E_e + \Delta E_i$  sein.

## 5.1. Schnelle Simulation für $n_3 \geq 16$

Wenn die Anzahl der Ionisationen  $n_3$  größer ist als 16, kann ein schnelleres Simulationsverfahren verwendet werden. Das Intervall für den möglichen Energieverlust ist in zwei Teile unterteilt: einen, in dem die Anzahl der Kollisionen groß ist und der Energieverlust aus der Gauss-Verteilung bestimmt werden kann, und den anderen, in dem der Energieverlust für jede Kollision einzeln bestimmt wird. Hierbei wird das erste Intervall  $[I, \alpha I]$  als A und das zweite Intervall  $[\alpha I, E_{\max}]$  als B bezeichnet.  $\alpha$  liegt zwischen 1 und  $E_{\max}/I$ . Eine Kollision mit einem Verlust im Intervall A tritt mit folgender Wahrscheinlichkeit auf:

$$P(\alpha) = \int_I^{\alpha I} g(E) dE = \frac{(E_{\max} + I)(\alpha - 1)}{E_{\max} \alpha}$$

Der mittlere Energieverlust und die Standardabweichung für diesen Kollisionstyp sind

$$\langle \Delta E(\alpha) \rangle = \frac{1}{P(\alpha)} \int_I^{\alpha I} E g(E) dE = \frac{I \alpha \ln \alpha}{\alpha - 1}$$

und

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{1}{P(\alpha)} \int_I^{\alpha I} E^2 g(E) dE = I^2 \alpha \left( 1 - \frac{\alpha \ln^2 \alpha}{(\alpha - 1)^2} \right)$$

Wenn die Anzahl von Kollisionen hoch ist, gehen wir davon aus, daß die Anzahl der Typ A-Kollisionen aus einer Gauss-Verteilung mit dem folgenden Mittelwert und der folgenden Standardabweichung berechnet werden kann:

$$\begin{aligned} \langle n_A \rangle &= n_3 P(\alpha) \\ \sigma_A^2 &= n_3 P(\alpha) (1 - P(\alpha)) \end{aligned} \quad (16)$$

Es wird weiter angenommen, daß der Energieverlust in diesen Kollisionen eine Gauss-Verteilung hat mit

$$\begin{aligned} \langle \Delta E_A \rangle &= n_A \langle \Delta E(\alpha) \rangle \\ \sigma_{E,A}^2 &= n_A \sigma^2(\alpha) \end{aligned} \quad (18)$$

Der Energieverlust dieser Kollisionen kann dann aus der Gauss-Verteilung bestimmt werden.

Die Kollisionen, in denen der Energieverlust in Intervall B auftritt, werden direkt bestimmt aus

$$\Delta E_B = \sum_{i=1}^{n_3 - n_A} \frac{\alpha I}{1 - u_i \frac{E_{\max} + I - \alpha I}{E_{\max} + I}}$$

Der gesamte Energieverlust ist die Summe dieser beiden Typen von Kollisionen:

$$\Delta E = \Delta E_A + \Delta E_B$$

Die Näherungen der Gleichungen (16), (17), (18) und (19) können unter den folgenden Bedingungen verwendet werden:

$$\begin{aligned} \langle n_A \rangle - c \sigma_A &\geq 0 \\ \langle n_A \rangle + c \sigma_A &\leq n_3 \\ \langle \Delta E_A \rangle - c \sigma_{E,A} &\geq 0 \end{aligned} \quad (22)$$

wobei  $c \geq 4$ . Aus den Gleichungen (13), (16) und (18) sowie den Bedingungen (22) und (23) können die folgenden Grenzwerte abgeleitet werden:

$$\alpha_{\min} = \frac{(n_3 + c^2)(E_{\max} + I)}{n_3(E_{\max} + I) + c^2 I} \leq \alpha \leq \alpha_{\max} = \frac{(n_3 + c^2)(E_{\max} + I)}{c^2(E_{\max} + I) + n_3 I}$$



Diese Bedingungen liefern einen unteren Grenzwert für die Anzahl der Ionisationen  $n_3$ , für die ein schnelles Simulationsverfahren vorgenommen werden kann.

$$n_3 \geq c^2$$

Da in den Bedingungen (22), (23) und (24) der Wert von  $c$  mindestens 4 ist, erhält man  $n_3 \geq 16$ . Um die Simulation zu beschleunigen, wird der maximale Wert für  $\alpha$  verwendet.

Die Anzahl der Kollisionen mit Energieverlust im Intervall B (die Anzahl der Wechselwirkungen, die direkt simuliert werden müssen) steigt mit der Gesamtanzahl der Kollisionen  $n_3$  langsam an. Die maximale Anzahl dieser Kollisionen kann abgeschätzt werden als

$$n_{B, \max} = n_3 - n_{A, \min} \approx n_3 (\langle n_A \rangle - \sigma_A)$$

Aus den vorherigen Ausdrücken für  $\langle n_A \rangle$  und  $\sigma_A$  läßt sich die folgende Bedingung ableiten:

$$n_B \leq n_{B, \max} = \frac{2n_3c^2}{n_3 + c^2}$$

Die folgenden Werte erhält man bei  $c = 4$ :

$n_3$	$n_{B, \max}$	$n_3$	$n_{B, \max}$
16	16	200	29.63
20	17.78	500	31.01
50	24.24	1000	31.50
100	27.59	$\infty$	32.00

## 5.2. Spezielle Simulation für den unteren Teil des Spektrums

Wenn die Schrittlänge sehr klein ist ( $\leq 5$  mm bei Gasen,  $\leq 2-3 \mu\text{m}$  bei Feststoffen), liefert das Modell für einige Ereignisse einen Energieverlust von 0. Um dies zu vermeiden, wird die Wahrscheinlichkeit für einen Energieverlust von 0 berechnet

$$P(\Delta E = 0) = e^{-(\langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle + \langle n_3 \rangle)}$$

Wenn die Wahrscheinlichkeit größer als 0,01 ist, wird ein spezielles Simulationsverfahren durchgeführt, das die Tatsache berücksichtigt, daß in diesen Fällen das Projektil nur mit den äußeren Elektronen des Atoms wechselwirkt. Ein Energieniveau von  $E_0 = 10$  eV wird ausgewählt, um den äußeren Elektronen zu entsprechen. Die mittlere Anzahl von Kollisionen kann berechnet werden aus

$$\langle n \rangle = \frac{1}{E_0} \frac{dE}{dx} \Delta x$$

Die Anzahl von Kollisionen  $n$  wird aus der Poisson-Verteilung bestimmt. Im Fall der dünnen Schichten werden alle Kollisionen als Ionisationen betrachtet, und der Energieverlust wird berechnet als

$$\Delta E = \sum_{i=1}^n \frac{E_0}{1 - \frac{E_{\max}}{E_{\max} + E_0} u_i}$$

## 6. Literatur

- L.Landau. On the Energy Loss of Fast Particles by Ionisation. Originalausgabe in *J. Phys.*, 8:201, 1944. Nachdruck in D.ter Haar, Herausgeber, *L.D.Landau, Collected papers*, Seite 417. Pergamon Press, Oxford, 1965.
- B.Schorr. Programs for the Landau and the Vavilov distributions and the corresponding random numbers. *Comp. Phys. Comm.*, 7:216, 1974.
- S.M.Seltzer and M.J.Berger. Energy loss straggling of protons and mesons. In *Studies in Penetration of Charged Particles in Matter*, Nuclear Science Series 39, Nat. Academy of Sciences, Washington DC, 1964.
- R.Talman. On the statistics of particle identification using ionization. *Nucl. Inst. Meth.*, 159:189, 1979.
- P.V.Vavilov. Ionisation losses of high energy heavy particles. *Soviet Physics JETP*, 5:749, 1957.